1. Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro k.

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ k.x-y-z &= 1 \\ x-y+z &= -2 \end{cases}$$

Es un sistema que depende de un parámetro k. Lo vamos a resolver utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Lo primero hallaremos el rango de la matriz A (matriz de los coeficientes), que nos va a dar mucha información. Para ello, calculamos el determinante de la Matriz A (por la regla de Sarrus, puesto que la calculadora no lo puede realizar porque depende del parámetro **k**)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [\,1.(-1).1+k.(-1).1+1.(-1).1\,]-[\,1.(-1).1+(-1).(-1).1+1.k.1]=$$

$$=[-1-k-1]-[-1+1+k]=[-2-k]-[k]=-2-2k$$

Veamos ahora, cuándo el valor del determinante es igual a cero, resolviendo una sencilla ecuación lineal $-2-2k=0 \Rightarrow -2k=2 \Rightarrow k=\frac{2}{-2} \Rightarrow k=-1$

Es decir, que:

a) si $k \neq -1$, entonces el determinante de la matriz A es distinto de cero, y por tanto el rango de A será tres, es decir, Rg(A) = 3.

Además, como el rango de la matriz ampliada A^{*}, no puede ser más de tres, ocurre que Rg(A) = Rg(A^{*}) = 3 = Nº incógnitas, luego en este caso el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (con una única solución que, obviamente, depende de k)

b) si $k=-1$, el determinante de la matriz A es cero, y por tanto el rango de A no puede ser tres.

Es fácil observar, que el rango de A es dos, pues por ejemplo $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Veamos ahora, en este caso, cuánto vale el Rg (A^{*}). Por supuesto, lo primero que hacemos es sustituir en A^{*} la k por -1, puesto que estamos en el caso b) k = -1

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$ Vemos que, tomando el determinante formado por la 1ª, 2ª y 4ª columnas, sale distinto de cero luego el Rg(A^{*}) = 3, y por tanto en este caso el SISTEMA ES INCOMPATIBLE (No tiene ninguna solución)

Una vez resuelta la discusión o clasificación del sistema según los valores del parámetro k, nos pueden pedir que lo resolvamos en algún caso particular. Por ejemplo, vamos a resolverlo para el caso $k = 2$.

Desde luego, que en este caso $k=2$, el sistema nos tendrá que salir compatible determinado puesto que hemos visto que para cualquier valor de k distinto de -1, el sistema sale compatible determinado.

Sustituyendo entonces la k por el valor que nos indiquen, en este caso 2, nos queda el siguiente sistema, que podemos resolver con la calculadora.
El resultado es $x=1$, $y=2$, $z=-1$